5.5 Champ de gravitation

- Une masse ponctuelle M produit un champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ à la position $\vec{r}$:

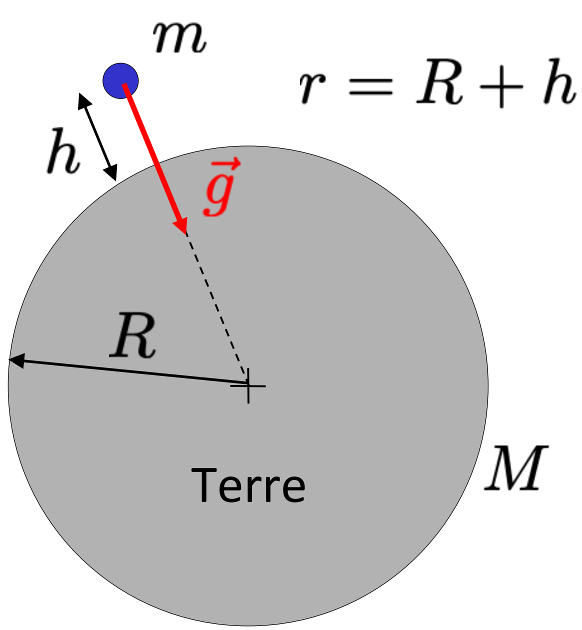
$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Force subie par une masse m à cette position :

$$\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r})$$

- Quel est le champ gravitationnel produit par une masse M non ponctuelle supposée sphérique de rayon R et homogène ?
(par exemple la Terre)

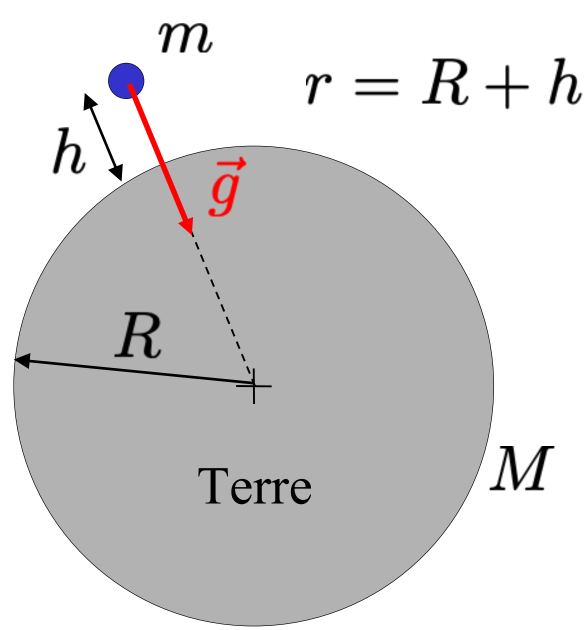
Réponse: si $r \geq R$, le même champ que produirait une masse M ponctuelle située au centre le la Terre (conséquence de la forme en $1/r^2$)



Ex.:
R = 6371 km $\Rightarrow$ *g(R)* = 9.81 m/s
Everest: h = 8.85 km $\Rightarrow$ *g(R+h)* = 9.78 m/s

5.5 Energie potentielle gravitationelle

Elle représente le travail que il faut fournir pour amener un point matériel de masse *m* (avec vitesse nulle) de la surface de la Terre à une hauteur *h:*



$$\int_R^r \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_R^r m\vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_R^r -\vec{\nabla}V(\vec{r})\cdot d\vec{r} = V(R) - V(r)$$

$$\int_R^r m\vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_R^r -m\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r} = \int_R^r -m\frac{GM}{r^2}dr$$

$$= m\frac{GM}{r}\Big|_R^r = \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{R} = V(R) - V(r)$$

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$ **Energie potentielle gravitationnelle**

Objet de masse *m* à hauteur *h* par rapport à la surface de la Terre

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{R^2}h = cste + mgh$$

accélération de gravitée terrestre

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{R-h}{R^2-h^2} \cong \frac{R-h}{R^2} = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}$$

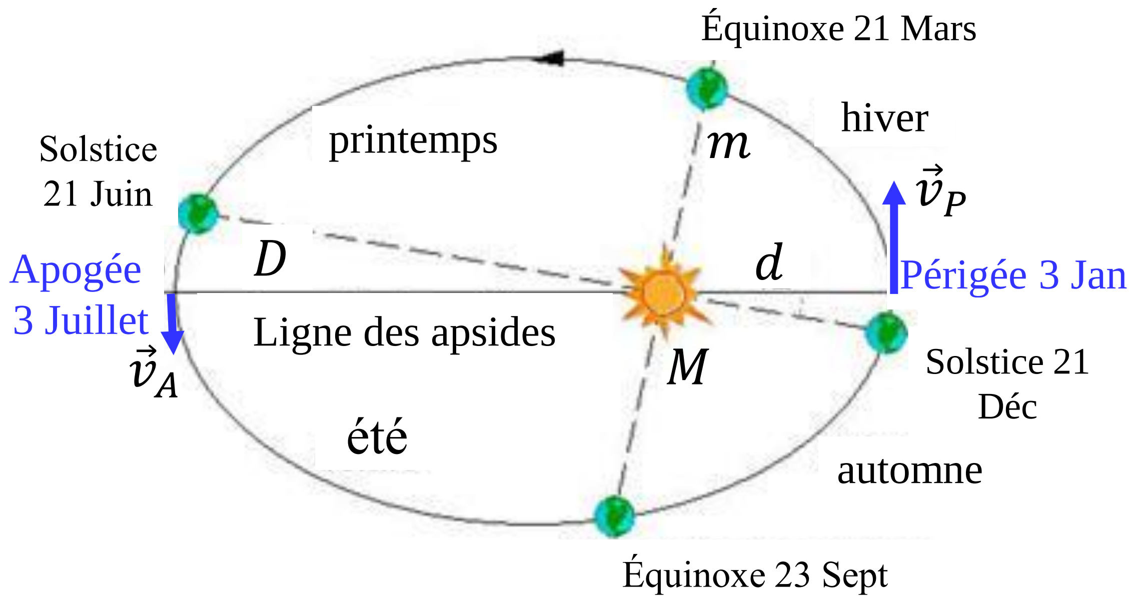
5.5 Ex.: Terre en rotation autour du Soleil

Determination de la masse *M* du Soleil

$$F_{S \to T} = \frac{4\pi^2 Mm}{MC}\frac{1}{r^2} = \frac{GMm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4\pi^2}{MG}$$

3éme loi de Kepler $T^2 = CD^3 = \frac{4\pi^2}{MG}D^3$

$$M = \frac{4\pi^2}{T^2 G}D^3$$



$$d = 147\ 10^6 km$$

$$D = 152\ 10^6 km$$

Vitesse de la Terre aux apsides

Potentiel central:

1) l'énergie mécanique est conservée

$$-\frac{GMm}{D} + \frac{1}{2}mv_A^2 = -\frac{GMm}{d} + \frac{1}{2}mv_P^2$$

2) Le moment cinétique est conservé

$$Dmv_A = dmv_P$$

$$\Rightarrow \quad v_P^2 = v_A^2 + 2GM\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right), \qquad v_A = \frac{d}{D}v_P$$

$$\Rightarrow \quad v_P^2 = 2GM\frac{D}{d}\frac{1}{D+d}$$

5.5 Ex.: Terre en rotation autour du Soleil

Energie mécanique totale de la Terre

$$E_T = -\frac{GMm}{d} + \frac{1}{2}mv_P^2 = -\frac{GMm}{d} + \frac{1}{2}m2GM\frac{D}{d}\frac{1}{D+d} = -\frac{GMm}{d}\left(1 - \frac{D}{D+d}\right) = -\frac{GMm}{D+d}$$

Energie potentielle effective

$$V_{eff}(r) = \frac{{L_S}^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{{L_S}^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad\Rightarrow\quad \frac{dV_{eff}(r)}{dr} = -\frac{{L_S}^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad r_{min} = \frac{{L_S}^2}{GMm^2}$$

$$V_{eff}(r_{min}) = -\frac{m}{2}\left(\frac{GMm}{L_S}\right)^2 = -\frac{m}{2}\left(\frac{GMm}{dmv_p}\right)^2 = -\frac{m}{2}\left(\frac{GM}{d}\right)^2\frac{d(D+d)}{2GMD} = -\frac{GMm}{4}\frac{D+d}{dD} = V_{min}$$

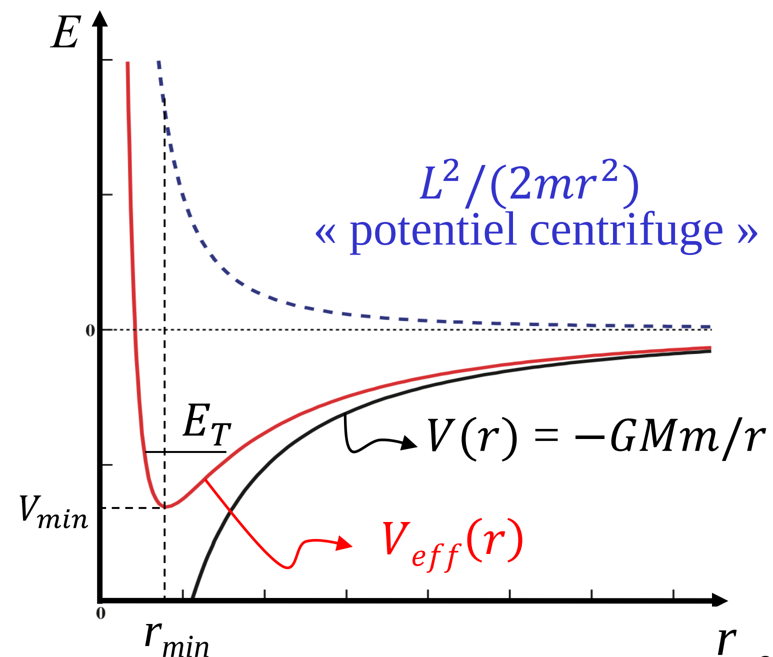
$E_T > V_{min}$? $\quad\Rightarrow\quad -\frac{GMm}{D+d} > -\frac{GMm}{4}\frac{D+d}{dD}$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{D+d} > -\frac{D+d}{4dD} \quad\Rightarrow\quad -\frac{4dD}{(D+d)^2} > -1$$

||

-0.997



La trajectoire décrite par la Terre est très proche à une circonférence

Si $E = V_{min}$, un seul valeur de r est permis $\Rightarrow$ orbite circulaire